



Ministério da Educação
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Campus Curitiba
 Departamento Acadêmico de Matemática
 Probabilidade e Estatística – Prof^ª: Silvana Heidemann Rocha
 Aluno(a): _____ Data: ___/___/___

PRÉ-REQUISITOS PARA O ESTUDO DA TEORIA ELEMENTAR DA PROBABILIDADE - Aula 06
 (Teoria de conjuntos, análise combinatória e propriedades de somatório)

I) CONJUNTOS:

- 1) Noção intuitiva
- 2) Relações de pertinência e inclusão
- 3) Tipos de conjuntos: conjunto universo, conjunto vazio, conjunto unitário, par ordenado e par não-ordenado
- 4) Operações com conjuntos: união, interseção, diferença, complemento, produto cartesiano.
- 5) Conjuntos finitos, conjuntos infinitos (enumeráveis ou não-enumeráveis).¹
- 6) Classe de um conjunto e conjunto das partes de um conjunto finito.
- 6) Conjuntos disjuntos
- 7) Algumas propriedades das operações com conjuntos:

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| a) $A \cup B = B \cup A$ | Lei comutativa da união de conjuntos |
| b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C$ | Lei associativa da união de conjuntos |
| c) $A \cap B = B \cap A$ | Lei comutativa da interseção de conjuntos |
| d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ | Lei associativa da interseção de conjuntos |
| e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Lei distributiva da interseção em relação à união de conj. |
| f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Lei distributiva da união em relação à interseção de conj. |
| g) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ | Lei distributiva da interseção em relação à diferença de conj. |
| h) $A - B = A \cap B^C$, onde B^C = complementar de B em relação ao conjunto universo. | |
| i) $A - B = B^C - A^C$ | |
| j) $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B)) = A \cup (A^C \cap B)$ | |
| l) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ | 1ª Lei de De Morgan |
| Generalização: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ | |
| m) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ | 2ª Lei de De Morgan |
| Generalização: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ | |

¹ Conjunto *finito* é um conjunto que tem n elementos, sendo n um número natural. Um conjunto X é dito *infinito* se admitir subconjunto Y , com $X \neq Y$, tal que X e Y possam ser colocados em correspondência biunívoca, isto é, $f: X \rightarrow Y$ é uma bijeção. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não. Um conjunto é dito *contável* ou *enumerável* se puder ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, caso contrário, o conjunto é *não contável* ou *não enumerável*. O conjunto dos naturais N é infinito, pois por exemplo considere o subconjunto $\{0,2,4,6,\dots\}$ de N . (Cf. SANT'ANNA, Adonai S. *O que é um conjunto*. Barueri: Manole (no prelo).

n) $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$

o) $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

p) $(A^c)^c = A$

q) $A \subset B \Rightarrow A^c \supset B^c \vee B^c \subset A^c$

Obs.: $\vee = \text{ou}$

r) $A = (A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

s) $A \subset B$ e $C \subset D \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$, onde \times = produto cartesiano.

t) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ Lei distributiva do produto cartesiano em relação à união de conj.

u) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ Lei distributiva do produto cartesiano em relação à interseção de conj.

v) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$. Obs.: $\wedge = \text{e}$

Observações:

- As propriedades das operações com conjuntos, enunciadas anteriormente, são demonstráveis no contexto da teoria de conjuntos mais usual (aquela que faz uso do Cálculo Proposicional Clássico L e do Cálculo de Predicados). Para demonstrar uma propriedade (teorema) deve-se ater às definições (por exemplo, à simbologia, às fórmulas, às regras de inferência) da teoria em questão.

Ex.: Prove a lei comutativa da união de conjuntos $A \cup B = B \cup A$.

Prova: $\forall x, x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \Rightarrow (x \in B) \vee (x \in A) \Rightarrow x \in B \cup A$.
conforme definição da união de dois conj.'s conforme tabelas verdades do Cálculo Proposicional Clássico L conforme definição da união de dois conj.'s

Logo, $A \cup B = B \cup A$.

Tabela verdade da disjunção \vee (ou) do Cálculo Proposicional Clássico L (Cálculo L)

A	\vee	B
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F
1º passo	3º passo	2º passo

Notas: 1) V=verdade, F=falsidade. 2) A e B são fórmulas do Cálculo L. 3) A indicação "1º, 2º, 3º passos" na última linha da tabela serve apenas para indicar a ordem em que a tabela deve ser preenchida. 4) Essa última linha não faz parte de uma tabela verdade do Cálculo L.

Tabela verdade da bicondicional \Leftrightarrow do Cálculo Proposicional Clássico L (Cálculo L)

A	\Leftrightarrow	B
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F
1º	3º	2º

Tabela verdade

$(A \vee B)$			\Leftrightarrow	$(B \vee A)$		
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F
1º	3º	2º	5º	2º	4º	1º

Nota: Comparam-se os passos 3º e 4º para compor o 5º (conclusão). Como os resultados do 5º passo (conclusão) foram todos V (verdadeiro), então a fórmula $((A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A))$ é uma tautologia, ou seja, as fórmulas $(A \vee B)$ e $(B \vee A)$ são equivalentes.

- O processo de demonstração de uma propriedade (teorema) não é único. Na prática, muitos autores mesclam o uso da linguagem formal da teoria em questão com o uso da linguagem natural dos seus interlocutores, a fim de se fazerem compreender por aqueles que não estão habituados à linguagem formal da teoria em questão (no exemplo acima, a teoria de conjuntos mais usual em matemática no Brasil). Ao desenvolver um processo de demonstração, deve-se estar atento para não corromper a idéia que se deseja provar.
- Provar algo, mesmo em matemática, é convencer o interlocutor a respeito de uma idéia através do uso da razão.

8) Definição: *Álgebra de subconjuntos do conjunto não vazio* Ω , denotada por $\mathcal{A}(\Omega)$, é uma classe² de subconjuntos de Ω satisfazendo os axiomas:

$$A_1) \Omega \in \mathcal{A}(\Omega)$$

$$A_2) \text{ Se } A \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}(\Omega)$$

$$A_3) \text{ Se } A \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ e } B \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}(\Omega) \quad (\text{i.e., a álgebra } \mathcal{A}(\Omega) \text{ contém toda união finita de subconj. 's de } \Omega)$$

Conseqüências da definição:

$$\bullet A_4) \phi \in \mathcal{A}(\Omega)$$

$$\bullet A_5) \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ , } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}(\Omega)$$

Entendimento da definição:

- $\mathcal{A}(\Omega)$ é não-vazia, visto que Ω é não vazio.
- $\mathcal{A}(\Omega)$ é fechada por complementação e uniões finitas, ou seja:
 - o complemento de qualquer conjunto pertencente a $\mathcal{A}(\Omega)$ pertence a $\mathcal{A}(\Omega)$;
 - a união de um número finito de conjuntos pertencentes $\mathcal{A}(\Omega)$ pertence a $\mathcal{A}(\Omega)$
- O conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ das partes de Ω é uma álgebra de Ω ?

Sim, se Ω é um conjunto finito. (Cf. JAMES, B., 2006, p. 6)

- $\mathcal{A}(\Omega)$ é única?

Não. Veja os contra-exemplos: a menor das álgebras de Ω é o conjunto $\mathcal{A}(\Omega) = \{\phi, \Omega\}$ e a maior das álgebras de Ω é $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$, se Ω é finito.

² Classe ou família de conjuntos é um conjunto em que seus elementos são também conjuntos, ou seja, é um conjunto de conjunto. (Cf. LIPSCHULTZ, 1974, p.6).

- Essa definição é adequada para Ω finito, pois ela contempla todas as uniões possíveis dos elementos da álgebra de subconjuntos de Ω .
 - Mas e se Ω for infinito (enumerável ou não enumerável)?
 - Se Ω for enumerável (infinito), então a álgebra de subconjuntos de Ω conterá um número infinito de uniões (será uma σ -álgebra de Ω).
 - Se Ω for não enumerável contínuo³, então a álgebra de subconjuntos de Ω será uma σ -álgebra de Borel)

9) Definição: *Sigma álgebra de subconjuntos* do conjunto não vazio Ω , denotada por $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$, é uma classe de subconjuntos de Ω satisfazendo os axiomas:

$$A_1) \Omega \in \sigma \mathcal{A}(\Omega)$$

$$A_2) A \in \sigma \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow A^c \in \sigma \mathcal{A}(\Omega)$$

$$A_3) A_1, A_2, A_3, \dots \in \sigma \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma \mathcal{A}(\Omega) \quad (\text{ou, seja, } \sigma \mathcal{A}(\Omega) \text{ contém toda união enumerável de subconj. 's de } \Omega)$$

• **Conseqüências da definição:** **A.4)** $A_1, A_2, A_3, \dots \in \sigma \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma \mathcal{A}(\Omega)$

Entendimento da definição:

- $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$ é não-vazia, visto que Ω é não vazio.
- Essa definição é adequada para os casos em que Ω é enumerável (infinito), visto que sua sigma-álgebra conterá um número enumerável (infinito) de uniões.
- Essa definição serve também para os casos em que Ω é finito?
 Sim, pois $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \dots$. Ou seja, uma $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$ é sempre uma álgebra, já que $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \dots \in \mathcal{A}(\Omega)$ se $\mathcal{A}(\Omega)$ é $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$ (uma união finita é conseqüência de uniões infinitas. Cf. JAMES, Barry, 2006, p. 6). Assim, uma união finita pode ser escrita como uniões infinitas se estivermos trabalhando com uma $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$.
- $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$ é fechada por complementação e uniões enumeráveis:
 - o complemento de qualquer conjunto pertencente a $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$, pertence a $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$;
 - a união de um número enumerável de conjuntos pertencentes a $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$, pertence a $\sigma \mathcal{A}(\Omega)$.

³ O conjunto dos irracionais é não enumerável, mas não é contínuo. O conjunto dos reais, bem como seus intervalos do tipo (a,b), [a,b], (a,b], [a,b) são conjuntos não enumeráveis contínuos.

- Essa definição serve também para os casos em que Ω é infinito não enumerável?

Se o conjunto Ω for não enumerável contínuo, então a $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ é dita $\sigma\mathcal{A}$ de Borel e tem suas especificidades.

Conceito: Sigma-álgebra de Borel (Cf. JAMES, B., 2006, p. 8).

- **Na reta \mathbf{R} :**

Em termos intuitivos, uma $\sigma\mathcal{A}$ de Borel na reta, denotada por B ou por $B_{\mathbf{R}}$, é a menor $\sigma\mathcal{A}$ contendo todos os intervalos.

Numa $\sigma\mathcal{A}$ de Borel na reta, um boreliano é um conjunto que pode ser obtido de um número enumerável de intervalos aplicando-se as operações \cup , \cap e c (união, interseção e complementar) um número enumerável de vezes.

- **No plano \mathbf{R}^2 :**

Intuitivamente, uma $\sigma\mathcal{A}$ de Borel no plano \mathbf{R}^2 , denotada por B^2 ou por $B_{\mathbf{R}^2}$, é a menor $\sigma\mathcal{A}$ contendo todos os retângulos.

Numa $B_{\mathbf{R}^2}$, um boreliano é um conjunto que pode ser obtido partindo-se de um número enumerável de retângulos e aplicando-se as operações \cup , \cap e c (união, interseção e complementar) um número enumerável de vezes.

- **No espaço \mathbf{R}^n :**

Uma $\sigma\mathcal{A}$ de Borel no \mathbf{R}^n , denotada B^n ou por $B_{\mathbf{R}^n}$, é a menor $\sigma\mathcal{A}$ contendo todos os retângulos n -dimensionais.

Entendimento desses conceitos:

- $B_{\mathbf{R}}$, $B_{\mathbf{R}^2}$ ou, genericamente, $B_{\mathbf{R}^n}$ do conjunto Ω é um conjunto não-vazio, visto que Ω é não vazio.
- Essa definição é adequada para os casos em que Ω é infinito não enumerável (contínuo).
- $B_{\mathbf{R}^n}$ é fechada por complementação e uniões enumeráveis (finitas ou infinitas)
 - o complemento de qualquer conjunto de $B_{\mathbf{R}^n}$ pertence a $B_{\mathbf{R}^n}$;
 - a união de um número infinito (finito também, pois, como visto anteriormente, uma união finita é consequência de uniões infinitas) de conjuntos de $B_{\mathbf{R}^n}$ pertence a $B_{\mathbf{R}^n}$.
- Essa definição serve também para os casos em que Ω é finito? E para Ω infinito enumerável?

10) Medida sigma-aditiva:

Definição: Uma medida σ -aditiva numa σ -álgebra $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ é uma função $f: \sigma\mathcal{A}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que:

$$A \mapsto x=f(A)$$

i) $f(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, A_3, \dots \in \sigma\mathcal{A}(\Omega)$ e $\forall (i, j) A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$, onde A_i são conjuntos mensuráveis.

O objetivo desta definição é encontrar uma medida numa σ -álgebra $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ que contenha todos os intervalos I e tal que $f(I) = \text{comprimento de } I$, ou seja, que a imagem de I seja o seu comprimento.

11) Partição de um conjunto:

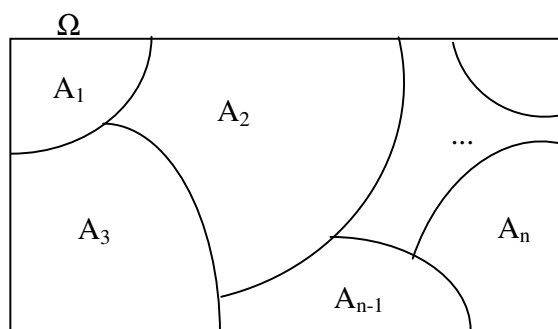
Definição: Os subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma *partição* do conjunto Ω se:

i) $A_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, \dots, n$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ (ou seja, A_i e A_j são conjuntos disjuntos)

iii) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Ex:



Em resumo, uma partição de um conjunto Ω é uma coleção de subconjuntos não-vazios e disjuntos de Ω , cujas uniões são iguais a Ω .

II) ANÁLISE COMBINATÓRIA:

Freqüentemente, o cálculo das probabilidades requer o uso dos resultados da análise combinatória, uma vez que a contagem direta do número de possibilidades pode ser muito trabalhosa.

Nos problemas de agrupamento, primeiramente é necessário classificar adequadamente o agrupamento e depois aplicar a fórmula correta.

1) Princípio fundamental da contagem (para conjuntos ordenados):

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes, de tal modo que:

n_1 é o nº de possibilidades da 1ª etapa,

n_2 é o nº de possibilidades da 2ª etapa,

⋮

n_k é o nº de possibilidades da k-ésima etapa,

então o número total de possibilidades do acontecimento ocorrer em k etapas é $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Ex.: Utilizando as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos hindu-arábicos, quantas placas de automóveis podem ser formadas, sabendo que cada placa tem 3 letras e 4 algarismos? (Admita, neste caso, inclusive uma placa com 4 zeros).

Solução:

1º jeito (Pelo princípio fundamental da contagem):

$$\text{Total de placas: } 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4 \text{ placas}$$

2º jeito (Por produto cartesiano):

Sejam $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

em que $n(A) = 26$ e $n(B) = 10$, sendo $n(A)$ o número de elementos do conjunto A e $n(B)$ o de B. Tem-se que:

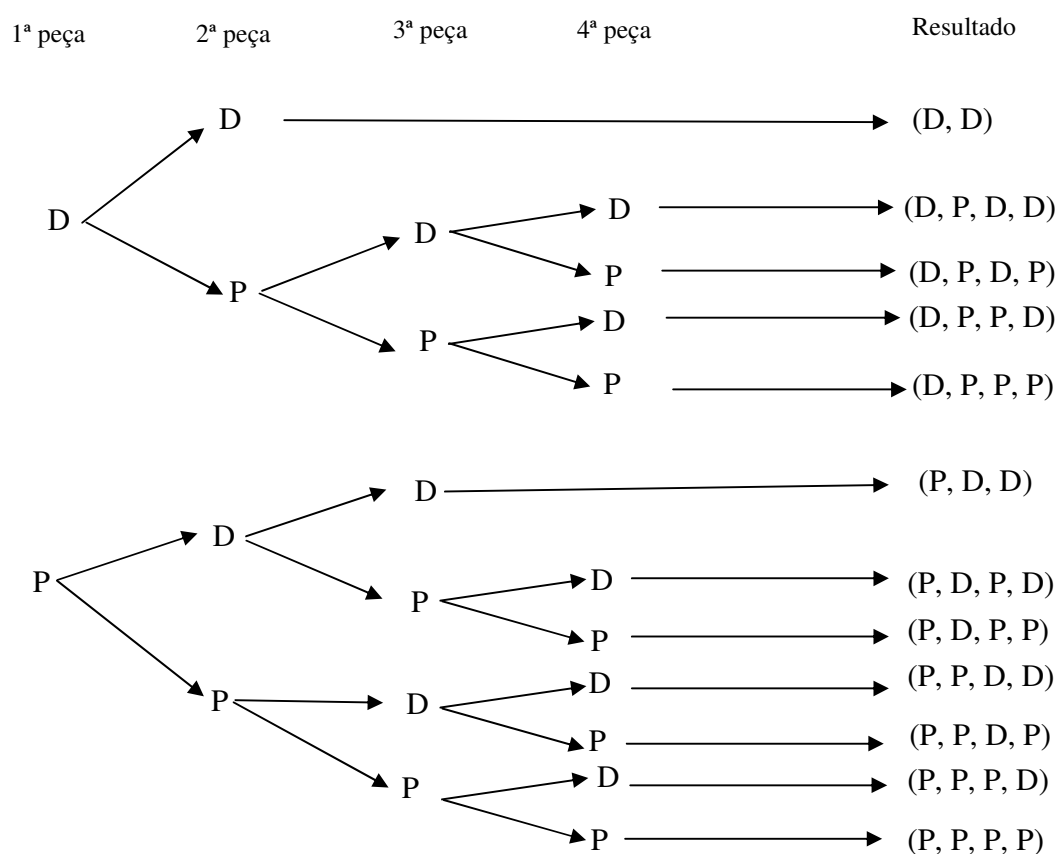
- Uma placa será formada por uma séptua-ordenada $(_, _, _, _, _, _, _) \in A \times A \times A \times B \times B \times B \times B$, onde X é o produto cartesiano. Assim, o total de séptuas-ordenadas é dado por

$$n(A) \cdot n(A) \cdot n(A) \cdot n(B) \cdot n(B) \cdot n(B) \cdot n(B) = [n(A)]^3 \cdot [n(B)]^4 = 26^3 \cdot 10^4$$

2) Diagrama da árvore das possibilidades

Representar através do diagrama da árvore o seguinte experimento:

Peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosas (D) ou não defeituosas (P). As peças são inspecionadas e suas condições registradas. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer em primeiro lugar. Descreva o conjunto de todas as possibilidades (espaço amostral) para este experimento.



O conjunto de todas as possibilidades é dado por:

$$\Omega = \{ (D,D), (D, P, D, D), (D, P, D, P), (D, P, P, D), (D, P, P, P), (P, D, D), (P, D, P, D), (P, D, P, P), (P, P, D, D), (P, P, D, P), (P, P, P, D), (P, P, P, P) \}$$

3) Arranjos:

Um agrupamento dos elementos de determinado conjunto universo constitui-se num arranjo de n elementos tomados p de cada vez se a natureza e a ordem dos elementos que compõem esse agrupamento distinguem-no dos demais subconjuntos do universo considerado. Se houver elementos repetidos no conjunto universo dado, então os agrupamentos constituir-se-ão em arranjos com repetições; caso contrário, tem-se apenas arranjos simples.

Ex₁ (arranjo simples): Determinar as possibilidades de cruzamento da linha de chegada para os três primeiros lugares, num páreo de sete cavalos numerados de 1 a 7.

Observação:

$(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1) \rightarrow$ os dois agrupamentos diferem-se entre si pela ordem dos elementos

$(1, 2, 3) \neq (1, 2, 5) \rightarrow$ os dois agrupamentos diferem-se entre si pela natureza dos elementos.

Ex₂ (arranjo com repetição) Determinar o número de possibilidades da distribuição de sexo dos três filhos de um casal.

- **Cálculo do número de agrupamentos possíveis em se tratando de arranjo:**

- **Arranjos simples (sem repetição de elementos no conjunto universo):**

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad \text{onde: } n \text{ é o nº de elementos do conjunto universo dado,}$$

p é o nº de elementos de cada agrupamento.

- **Arranjos com repetição de elementos no conjunto universo:**

$$(Ar)_{n,p} = n^p, \quad \text{onde: } n \text{ é o nº de elementos do conjunto universo dado,}$$

p é o nº de repetições de n no experimento dado.

4) Permutação:

Dado um conjunto universo com n elementos, chamamos *permutação* todo arranjo desses n elementos tomados n a n . Se houver elementos repetidos no conjunto universo, então os agrupamentos constituir-se-ão em permutações com repetições; caso contrário, tem-se apenas permutações simples.

Ex₁(permutação simples): Possibilidades de cruzamento da linha de chegada para os sete primeiros lugares, num páreo com sete cavalos.

Ex₂ (permutação com repetição): Anagramas da palavra BATATA.

- **Cálculo das permutações:**

- **Permutações simples:**

$$P_n = n! \quad , \quad \text{onde: } n \text{ é o número de elementos de um conjunto universo agrupados } n \text{ a } n.$$

- **Permutações com elementos repetidos no conjunto universo:**

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}, \quad \text{onde: } n \text{ é o nº de elementos do conjunto universo;}$$

n_1 é o nº de elementos iguais a a_1 no conj. universo;;

n_2 é o nº de elementos iguais a a_2 no conj. universo;

n_3 é o nº de elementos iguais a a_3 no conj. universo;

⋮

n_k é o nº de elementos iguais a a_k no conj. universo;

$$\sum_{i=1}^k n_i = n.$$

5) Combinações:

Um agrupamento dos elementos de um conjunto universo constitui-se numa combinação de n elementos tomados p de cada vez se apenas a natureza, e não a ordem, dos elementos que compõem esse agrupamento distinguem-no dos demais subconjuntos do conjunto universo considerado.

Ex: Comissão de três membros escolhidos entre seis pessoas: Maria, João, Pedro, José, Lucas, Lúcia.

$\{\text{Maria, João, Pedro}\} = \{\text{Pedro, Maria, João}\} \rightarrow$ a ordem dos elementos não altera a comissão.

$\{\text{Maria, João, Pedro}\} \neq \{\text{Maria, João, Lúcia}\} \rightarrow$ a natureza dos elementos altera a comissão.

- **Cálculo das combinações simples:**

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad \text{onde: } n \text{ é o nº de elementos do conjunto universo dado;}$$

p é o nº de elementos de cada agrupamento.

III) PROPRIEDADES DE SOMATÓRIO

Vide anexos de livros de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

- APOSTOL, Tom M. **Mathematical analysis**. 2 ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishin Company, 1974.
- JAMES, BARRY R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**, 2a. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 1996.
- LIPSCHUTZ, Seymour. **Probabilidade**. Coleção Schaum. São Paulo: McGraw-Hill, 1974.
- MEYER, P.L. - **Probabilidade, aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1972
- SPIEGEL, M.L. - **Probabilidade e estatística** - Coleção Schaum. São Paulo: McGraw-Hill., 1978.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. – **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**, 2a. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- NETO CHAVES, Anselmo. **Probabilidade e estatística matemática I**. Curitiba: UFPR, 2008. (apostila).
- SANT'ANNA, Adonai S. *O que é um conjunto*. Barueri: Manole (no prelo).
- TARANTOLA, Albert. **Mapping of probabilities: theory for the interpretation of uncertain physical measurements**. France: Université de Paris, Institut de Physique du Globe, 2007.